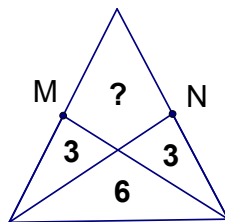


MATEMATIČKI KLOKAN J
6 700 000 sudionika u 51 zemlji Europe, Amerike, Afrike i Azije
Četvrtak, 15. ožujka 2012. – Trajanje 75 minuta
Natjecanje za Junior (II. i III. razred SŠ)

- * Natjecanje je pojedinačno. Računala su zabranjena.
- * Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan.
- * Prvih osam pitanja donosi po 3 boda, drugih osam po 4 boda, a trećih osam po 5 bodova.
- * Ako nijedan odgovor nije zaokružen ili su zaokružena dva ili više odgovora zadatak donosi 0 bodova.
- * Ako je zaokružen odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.
- * Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.

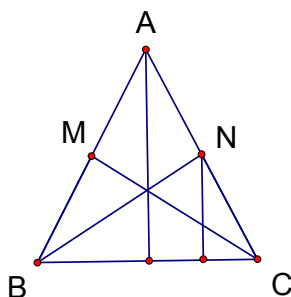
Pitanja za 3 boda:

1. Točke M i N su polovišta krakova jednakokračnog trokuta. Kolika je površina četverokuta označenog s "?"?



- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Rješenje: D



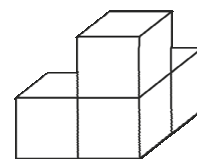
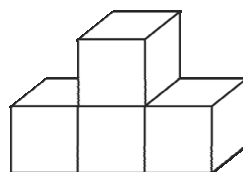
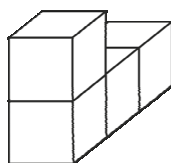
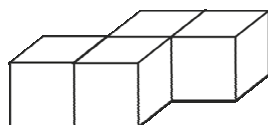
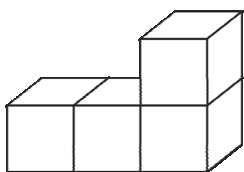
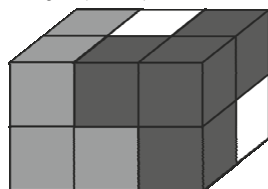
Visina v_1 iz točke N na osnovicu \overline{BC} zadanog jednakokračnog trokuta ima duljinu jednaku polovini visine v na osnovicu \overline{BC} . Površina trokuta NBC jednaka je zbroju površina dvaju manjih trokuta i iznosi $6 + 3 = 9$. Trokut NBC i trokut ABC imaju zajedničku stranicu \overline{BC} , s pripadajućom visinom v , odn. v_1 . Kako je visina v dva puta dulja od visine v_1 , to je i površina trokuta ABC dva puta veća od površine trokuta NBC. Znači, površina trokuta ABC iznosi 18. Oduzimanjem poznatih površina sa slike, slijedi da je površina četverokuta označenog s "?" jednaka $18 - 6 - 3 - 3 = 6$.

2. $11.11 - 1.111 =$

- A) 9.009 B) 9.0909 C) 9.99 D) 9.999 E) 10

Rješenje: D

3. Kvadar je složen od tri dijela različitih boja (slika). Svaki dio sastoji se od 4 kocke istih boja. Kako izgleda dio bijele boje?



A)

B)

C)

D)

E)

Rješenje: D

4. Kada Alica želi poslati Borisu poruku, koristi sljedeće njima dobro poznato kodiranje: A = 01, B = 02, C = 03, D = 04, ..., Z = 26. Nakon pretvaranja svakog slova u broj, množi broj brojem 2 i dodaje 9. Tako je poruka pretvorena u niz brojeva. Danas je Boris primio niz 25-19-45-38 i dešifrirao ga. Koja je bila početna poruka?

- A) HERO B) HELP C) HEAR
D) HERS E) Alica je napravila pogrešku

Rješenje: E

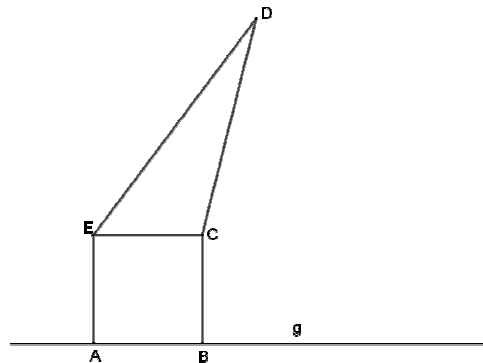
$$(25 - 9) : 2 = 16 : 2 = 8 \rightarrow H$$

$$(19 - 9) : 2 = 10 : 2 = 5 \rightarrow E$$

$$(45 - 9) : 2 = 36 : 2 = 18 \rightarrow R$$

Zadnji broj u nizu trebao bi, kao i svi prethodni, biti neparan (zbog dodavanja broja 9 parnom broju). Prema tome, Alica je napravila pogrešku.

5. Kvadrat ABCE ima stranice duljine 4 cm i površinu jednaku površini trokuta ECD. Kolika je udaljenost točke D od pravca g?



- A) 8 cm B) $(4 + 2\sqrt{3})$ cm C) 12 cm D) $10\sqrt{2}$ cm
E) ovisi o položaju točke D

Rješenje: C

Površina kvadrata iznosi 16 cm^2 . Trokut ECD ima također površinu 16 cm^2 i zajedničku stranicu s kvadratom. Duljina visine na zajedničku stranicu \overline{EC} iznosi 8 cm. Udaljenost točke D od pravca g jednaka je $8 + 4 = 12 \text{ cm}$.

6. Zbroj svih znamenaka sedmero-znamenastog prirodnog broja iznosi 6. Koliki je umnožak svih znamenaka tog broja?

- A) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ B) 7 C) 6 D) 5 E) 0

Rješenje: E

7. Trokut ABC je pravokutni trokut s katetama duljina 6 cm i 8 cm, a točke K, L i M su polovišta njegovih stranica. Koliki je opseg trokuta KLM?

- A) 10 cm B) 12 cm C) 15 cm D) 20 cm E) 24 cm

Rješenje: B

Duljina hipotenuze u trokutu ABC je 10 cm. Dužine \overline{KL} , \overline{LM} i \overline{MK} su srednjice trokuta ABC i njihove duljine su polovine duljina stranica trokuta ABC. Opseg trokuta KLM iznosi $3 + 4 + 5 = 12 \text{ cm}$.

8. U četirima od sljedećih izraza možemo svaki broj 8 zamijeniti nekim drugim prirodnim brojem (koristeći uvijek isti broj za zamjenu) i dobiti iste rezultate. Koji izraz nema to svojstvo?

- A) $(8 + 8 - 8) : 8$ B) $8 + (8 : 8) - 8$ C) $8 : (8 + 8 + 8)$ D) $8 - (8 : 8) + 8$ E) $8 \cdot (8 : 8) : 8$

Rješenje: D

Zamijenimo li broj 8 brojem a , vidjet ćemo da samo izraz D ovisi o broju a :

A) $(a + a - a) : a = 1$, B) $a + (a : a) - a = 1$, C) $a : (a + a + a) = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$, D) $a - (a : a) + a = 2a - 1$

E) $a \cdot (a : a) : a = 1$.

Pitanja za 4 boda:

9. Dvije stranice četverokuta imaju duljine 1 cm i 4 cm. Dijagonala duljine 2 cm dijeli četverokut na dva jednakokračna trokuta. Koliki je opseg četverokuta?

- A) 8 cm B) 9 cm C) 10 cm D) 11 cm E) 12 cm

Rješenje: **D**

Stranice četverokuta imaju duljine 4 cm, 4 cm, 2 cm i 1 cm. Opseg četverokuta iznosi 11 cm.

10. Brojevi 144 i 220 pri dijeljenju istim prirodnim brojem x daju ostatak 11. Odredi x .

- A) 7 B) 11 C) 15 D) 19 E) 38

Rješenje: **D**

Brojevi 144 i 220 umanjani za ostatak 11 iznose redom 133 i 209. Zajednički djelitelj brojeva 133 i 209, različit od 1, je 19.

11. Ako Antonio stoji na stolu, a Marin na podu, Antonio je za 80 cm viši od Marina. Ako Marin stoji na istom stolu, a Antonio na podu, Marin je za 1 m viši od Antonia. Koliko je visok stol?

- A) 20 cm B) 80 cm C) 90 cm D) 100 cm E) 120 cm

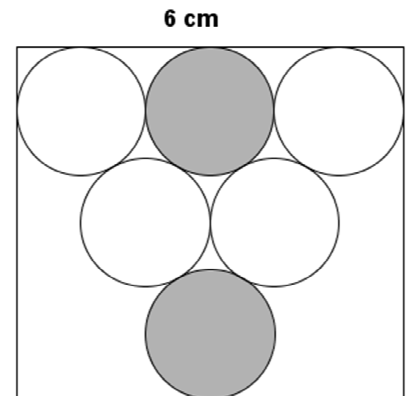
Rješenje: **C**

Neka je t visina stola, M Marinova visina, A Antonijeva visina. Tada vrijedi: $M + 80 = A + t$ i $M + t = A + 100$.

Oduzimanjem ovih dviju jednažbi lako se dobije da je $t = 90$, odnosno visina stola iznosi 90 cm.

12. U pravokutnik s jednom stranicom duljine 6 cm upisano je 6 krugova kao na slici. Koja je udaljenost između dva siva kruga?

- A) 1 cm B) $\sqrt{2}$ cm C) $(2\sqrt{3} - 2)$ cm
D) $\frac{\pi}{2}$ cm E) 2 cm



Rješenje: **C**

Dužine koje spajaju središta lijevog i desnog kruga u gornjem redu pravokutnika i središte donjeg sivog kruga čine stranice jednakokraničnog trokuta. Duljina stranice tog jednakokraničnog trokuta iznosi 4 cm. Visina tog

jednakokraničnog trokuta računa se po formuli $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i iznosi $2\sqrt{3}$ cm. Udaljenost između dva siva kruga iznosi

$(2\sqrt{3} - 2)$ cm.

13. Na svakom zidu Brankove sobe nalazi se po jedan sat i nijedan od njih ne pokazuje točno vrijeme (ili žure ili zaostaju). Prvi sat griješi u točnosti dvije minute, drugi tri minute, treći 4 minute, a četvrti 5 minuta. U jednom trenutku, kada je Branko pogledao na satove, oni su pokazivali: 6 minuta do 3 sata, 3 minute do 3 sata, 3 sata i 2 minute, 3 sata i 3 minute. Točno vrijeme je bilo:

- A) 3:00 B) 2:57 C) 2:58 D) 2:59 E) 3:01

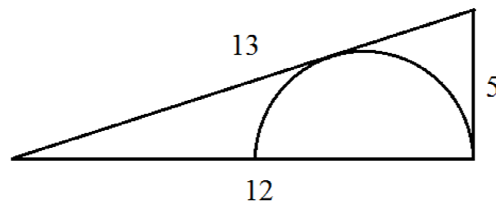
Rješenje: **D**

Ako je točno vrijeme 3:00, onda nema netočnosti od 5 minuta. Ako je točno vrijeme 2:57, onda bi jedan od satova pokazivao točno vrijeme, što je u kontradikciji s podatkom da nijedan od njih ne pokazuje točno vrijeme. Ako je točno

vrijeme 2:58, onda jedan sat griješi u točnosti za jednu minutu, a to nije karakteristika nijednog od satova. Isto tako je i ako je točno vrijeme 3:01. Prema tome, točno vrijeme je 2:59.

14. Na slici je pravokutni trokut sa stranicama duljina 5 cm, 12, cm i 13 cm. Koliki je radijus ucrtane polukružnice?

- A) $\frac{7}{3}$ cm B) $\frac{10}{3}$ cm C) $\frac{12}{3}$ cm
 D) $\frac{13}{3}$ cm E) $\frac{17}{3}$ cm



Rješenje: **B**

Nadopunimo li pravokutni trokut sukladnim trokutom, dobit ćemo jednakokrani trokut s krakovima duljine 13 cm i osnovicom duljine 10 cm. Površina tog jednakokravnog trokuta iznosi 60 cm^2 , a radijus ρ njemu upisane kružnice

$$\rho = \frac{P}{s} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3} \text{ cm.}$$

15. Znamenka stotica četveroznamenkastog broja je 3, a zbroj preostale tri znamenke također iznosi 3. Koliko takvih brojeva ima?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Rješenje: **E**

To su brojevi: 1302, 1311, 1320, 2301, 2310 i 3300.

16. U 12 polja treba upisati brojeve od 1 do 9 tako da su zbrojevi po retcima jednaki, te zbrojevi po stupcima jednaki (zbrojevi po stupcu i retku ne moraju biti međusobno jednaki). Neki su brojevi već upisani. Koji broj treba upisati u osjenčano polje?

- A) 1 B) 4 C) 6
 D) 8 E) 9

2	4		2
	3	3	
6		1	

Rješenje: **B**

Pitanja za 5 bodova:

17. Tri sportaša Mate, Šime i Ive sudjeluju u maratonu. Prije početka utrke četiri gledatelja raspravljala su o njihovim šansama za pobjedu. Prvi je izjavio: "Pobijedit će Mate ili Šime". Drugi je izjavio: "Ako će Šime biti drugi, Ive će pobijediti". Treći je izjavio: "Ako će Šime biti treći, Mate neće pobijediti". Četvrti je izjavio: "Šime ili Ive bit će drugi". Po završetku utrke ispostavilo se da su sva četiri gledatelja bila u pravu. U kojem su redoslijedu maratonci završili utrku?

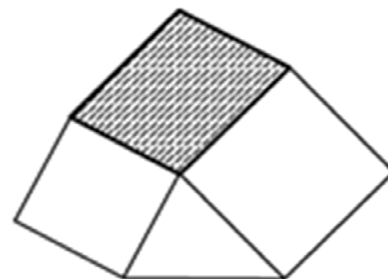
- A) Mate, Šime, Ive B) Mate, Ive, Šime C) Ive, Šime, Mate D) Šime, Ive, Mate E) Šime, Mate, Ive

Rješenje: **D**

Ako je tvrdnja A točna, onda drugi gledatelj nije u pravu. Ako je tvrdnja B točna, onda treći gledatelj nije u pravu. Ako je tvrdnja C točna, onda prvi gledatelj nije u pravu. Ako je tvrdnja E točna, onda četvrti gledatelj nije u pravu. Točna je tvrdnja D i izjave svih četiriju gledatelja su točne.

18. Duljine stranica kvadrata na slici su 4 cm i 5 cm, površina trokuta je 8 cm^2 . Kolika je površina osjenčanog paralelograma?

- A) 15 cm^2 B) 16 cm^2 C) 18 cm^2
 D) 20 cm^2 E) 21 cm^2



Rješenje: **B**

Duljine stranica trokuta su 4 cm i 5 cm. Neka je kut između tih dviju stranica α . Tada je kut paralelograma kod zajedničkog vrha s trokutom veličine $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$, a susjedni kut paralelograma je α . Dijagonala paralelograma iz zajedničkog vrha s trokutom dijeli paralelogram na dva sukladna trokuta sa stranicama duljina 4 cm i 5 cm i kutom α između tih stranica. Prema tome, površina paralelograma jednaka je $P = 2 \cdot 8 = 16 \text{ cm}^2$.

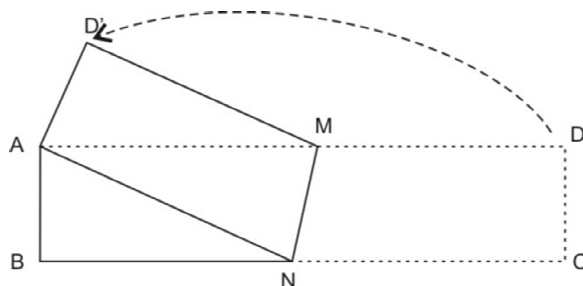
19. Ana je napisala $2012 = m^m \cdot (m^k - k)$ pri čemu su m i k neki prirodni brojevi. Koja je vrijednost broja k ?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 9 E) 11

Rješenje: **D**

Rastavom broja 2012 na proste faktore dobit ćemo $2012 = 2^2 \cdot 503 = 2^2(2^9 - 9)$. Prema tome, $k = 9$.

20. Papir ABCD oblika pravokutnika sa stranicama duljina 4 cm i 16 cm presavijen je preko pravca MN tako da se vrh C poklopio s vrhom A, kao što je prikazano na slici. Kolika je površina peterokuta ABNMD'?



- A) 17 cm² B) 27 cm² C) 37 cm² D) 47 cm² E) 57 cm²

Rješenje: **D**

Neka je $|BN| = x$, tada je $|CN| = |NA| = 16 - x$. Za duljine stranica pravokutnog trokuta ABN vrijedi:

$4^2 + x^2 = (16 - x)^2$, a odatle je $x = |BN| = 7.5 \text{ cm}$ i $|CN| = 8.5 \text{ cm}$. Pravac AN je presječnica usporednih pravaca BC i AD pa je $\angle BNA \cong \angle NAM$, a pravac AD je presječnica usporednih pravaca AN i MD' pa je $\angle NAM \cong \angle AMD'$. U trokutima ABN i AD'M imamo tri para sukladnih kutova ($\angle BNA \cong \angle AMD'$, $\angle NBA \cong \angle AD'M = 90^\circ$) i jedan par stranica jednake duljine $|AB| = |AD'|$, pa su trokuti ABN i AD'M sukladni (poučak KSK). Sukladni trokuti imaju jednake površine, pa se površina peterokuta ABNMD' može izračunati zbrajanjem površina trokuta ABN, AD'M i ANM.

$$P(\text{ABN}) = P(\text{AD'M}) = \frac{4 \cdot 7.5}{2} = 15 \text{ cm}^2.$$

Trokut ANM je trokut u kojem je visina na stranicu \overline{AM} jednake duljine kao i kraća stranica pravokutnika ABCD, pa je

$$P(\text{ANM}) = \frac{|AM| \cdot |AB|}{2} = \frac{8.5 \cdot 4}{2} = 17 \text{ cm}^2. \text{ Dakle, } P(\text{ABNMD}') = 15 + 15 + 17 = 47 \text{ cm}^2.$$

21. Posljednja znamenka različita od nule, broja $K = 2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53}$, je:

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

Rješenje: **C**

$K = 2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53} = (2 \cdot 5)^{53} \cdot 2^6 \cdot 3^4 = 10^{53} \cdot 64 \cdot 81 = 10^{53} \cdot 5184$. Posljednja znamenka različita od nule broja K je 4.

22. Svaka od 5 svjetiljki može biti ugašena ili upaljena. Na početku sve su svjetiljke bile ugašene. Nakon 10 paljenja ili gašenja može se reći:

- A) nemoguće je da su sve svjetiljke ugašene
B) sigurno su sve svjetiljke upaljene
C) nemoguće je da su sve svjetiljke upaljene
D) sigurno su sve svjetiljke ugašene
E) nijedna od prethodnih izjava nije točna

Rješenje: **C**

23. Nikola je ispisao sve troznamenaste brojeve i za svaki od njih odredio umnožak znamenaka. Nakon toga odredio je i zbroj svih tih umnožaka. Koji je zbroj dobio?

- A) 45 B) 45^2 C) 45^3 D) 2^{45} E) 3^{45}

Rješenje: C

Umnožak znamenaka troznamenastog broja kojemu je znamenka desetica ili znamenka jedinica jednaka nuli iznosi 0. Takvi brojevi neće utjecati na ukupni zbroj svih umnožaka.

Promatrajući brojeve prve stotice lako se vidi da zbroj umnožaka znamenaka brojeva 111,112,113, ..., 118, 119 iznosi $1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9 = 45$, zbroj umnožaka znamenaka brojeva 121,122,123, ..., 128, 129 iznosi $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9) = 2 \cdot 45$, analogno, sljedeći zbrojevi umnožaka su $3 \cdot 45, 4 \cdot 45, \dots, 8 \cdot 45$ i $9 \cdot 45$.

Ukupan zbroj umnožaka prve stotice iznosi

$$45 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 45 + \dots + 8 \cdot 45 + 9 \cdot 45 = 45 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9) = 45^2.$$

Za brojeve druge stotice taj je zbroj umnožaka dvostruko veći (zbog znamenke stotice 2) i iznosi $2 \cdot 45^2$.

Analogno, za ostale su troznamenaste brojeve zbrojevi umnožaka znamenaka jednaki $3 \cdot 45^2, 4 \cdot 45^2, \dots, 8 \cdot 45^2$ i $9 \cdot 45^2$. Konačni zbroj svih umnožaka iznosi $45^2 + 2 \cdot 45^2 + 3 \cdot 45^2 + \dots + 8 \cdot 45^2 + 9 \cdot 45^2 = 45^2(1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9) = 45^3$.

24. Brojevi 1 do 120 upisani su u 15 redaka kao što je prikazano na slici. U kojem je stupcu (brojeći s lijeva) zbroj brojeva najveći?

1								
2	3							
4	5	6						
7	8	9	10					
11	12	13	14	15				
...								
106	107	108	109	110	111	112	...	120

- A) 1 B) 5 C) 7 D) 10 E) 13

Rješenje: B

Brojevi u 1.stupcu su: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, 92 i 106, a njihov zbroj iznosi 575.

Brojevi u 5.stupcu su: 15, 20, 26, 33, 41, 50, 60, 71, 83, 96 i 110, a njihov zbroj iznosi 605.

Brojevi u 7.stupcu su: 28, 35, 43, 52, 62, 73, 85, 98 i 112, a njihov zbroj iznosi 588.

Brojevi u 10.stupcu su: 55, 65, 76, 88, 101 i 115, a njihov zbroj iznosi 500.

Brojevi u 13.stupcu su: 91, 104 i 118, a njihov zbroj iznosi 313.